平行線と線分比

平行線と線分比を証明する。

中学校の多くの教科書では、平行線と線分比は相似を利用して証明される。
しかし、相似条件の証明（相似条件と相似が同値であることの証明）は、この平行線と線分比の関係を用いて証明される。
これでは循環論法である。

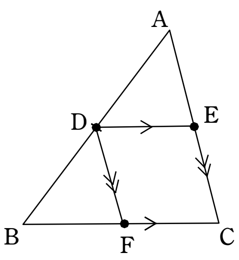
よって、平行線と線分比の証明を相似を用いずに行うか、相似条件の証明を平行線と線分比を用いずに行うかのどちらかを行う必要がある。
筆者が勉強した書籍では、平行線と線分比の証明を相似を用いずに証明することでこの循環論法を生じさせず、公理的構成を構築していたので、それを参考にして、平行線と線分比の証明を相似を用いずに証明する。

定理１→定理２→定理３→定理４の流れで証明し、
「二等分点」→「三等分点」→「n 等分点」→「実数全体（$1:\sqrt{2}$ など）」に拡張する。
しかし、基本的な流れは定理１（二等分点）と同じである（定理４のみ背理法を用いる）。

■定理１　平行線と線分比（中点）

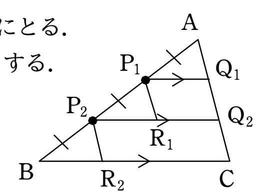
△ABCにおいて，辺ABの中点をD，Dを通りBCに平行な直線がACと交わる点をEとする。
このとき，次のことを示せ。
1）DEは辺ACの中点を通る。
2）DE＝$\frac{1}{2}$ BC

（証明）
点Dを通り，辺ACに平行な直線をひき，その直線とBCとの交点をFとする。
1辺両端角相等より　△ADE≡△DBF
よって　AE＝DF
また、仮定よりDE//BC，DE//ACより　四角形DFCEは平行四辺形
よって　DF＝EC
したがって　AE＝EC（1）が示された）
四角形DFCEは平行四辺形なので　DE＝FC
△ADE≡△DBFより　DE＝BF
よって　BF＝DE＝FC
したがって　$DE=\frac{1}{2}BC$



■定理２　平行線と線分比の拡張（3等分点）

△ABCの辺AB上に点P，P’をAP＝PP’＝P’Bとなるようにとる．
点Pを通り辺BCに平行な直線をひき，辺ACとの交点をQとする．
同じように，点P’を通り辺BCに平行な直線をひき，
辺ACとの交点をQ’とする．
このとき，AQ＝QQ’＝Q’Cが成り立つことを示せ。



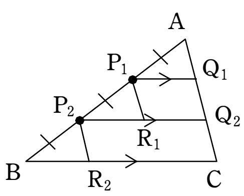
（証明）
点 P_1 を通り、直線BCに平行な直線とACとの交点を Q_1，
点 P_2 を通り、直線BCに平行な直線とACとの交点を Q_2，
点 P_1 を通り、直線ACに平行な直線とBCとの交点を R_1，
点 P_2 を通り、直線ACに平行な直線とBCとの交点を R_2 とする。
平行線の同位角は等しいため、一辺両端角相等より

$$\triangle AP_1Q_1 \equiv \triangle AP_2Q_2 \equiv \triangle AP_3Q_3$$

よって　$AQ_1=P_1R_1=P_2R_2$
また、四角形 $P_1R_1Q_2Q_1$，四角形 $P_2R_2CQ_2$ は平行四辺形であるから

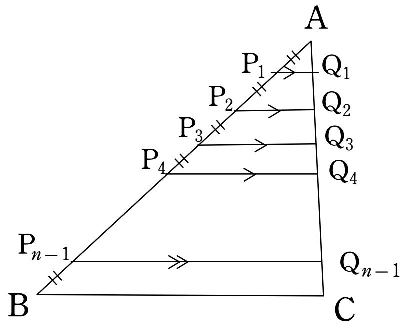
$$P_1R_1=Q_1Q_2,\quad P_2R_2=Q_2C$$

したがって、$AQ_1=Q_1Q_2=Q_2C$ ■



■定理３　平行線と線分の有理数範囲での一般化（n 等分点）

△ABCにおいて，AB上にn−1個の点 P_1，P_2，P_3，…，P_{n-1} を $AP_1=P_1P_2=P_2P_3=\cdot\cdot\cdot=P_{n-1}B$ となるようにとり，各点 $P_i(i=1,2,3,\cdot\cdot\cdot,n-1)$ を通り，BCに平行に直線を引き，ACとの交点を Q_i とする。
このとき、$AQ_1=Q_1Q=Q_2Q=\cdot\cdot\cdot=Q_{n-1}C$ が成り立つ。



（証明）
点 P_k を通り、直線BCに平行な直線とACとの交点を Q_k，
点 P_k を通り、直線ACに平行な直線とBCとの交点を R_k
とする（ただし、kは $n-1$ 以下の自然数）。
1辺両端角相等より

$$\triangle AP_1Q_1\equiv\triangle P_1P_2R_1\equiv\cdot\cdot\cdot\equiv\triangle P_kP_{k+1}R_k\equiv\cdot\cdot\cdot\equiv\triangle P_{n-1}BR_{n-1}$$

よって　$AQ_1=P_kR_k=P_{k-1}R_{k-1}$
また　四角形 $P_kP_{k+1}R_kR_{k-1}$ は平行四辺形なので　$P_kP_{k+1}=R_{k-1}R_k$
したがって　$AQ_1=Q_1Q_2=\cdot\cdot\cdot=Q_{n-1}C$ ■

定理４　平行線と線分の実数全体での一般化

△ABCの辺AB上に点Dをとり，Dを通り辺BCに平行な直線をとる。
このとき、辺BCと辺ACとの交点をEとすれば，$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ である。

証明はコナレのユーザー限定ページにて