相似の定義と相似条件

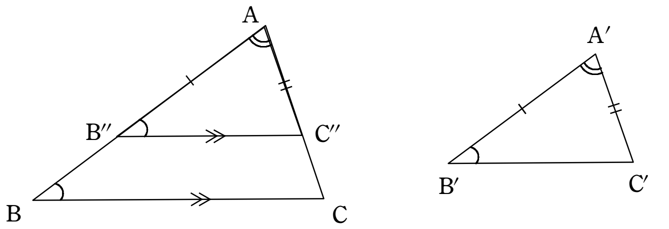
中学校の教科書では、相似を「2つの図形があり、一方の図形を拡大または縮小したものと、他方の図形が合同であるとき、この2つの図形は相似である（*）」と定義し、下の「定義：三角形の相似」の内容を、（*）から導かれる「相人は図形の性質」とするのが一般的である。
確かに直観的にわかりやすく、任意の図形に適用できるが、一方で、相似条件と相似の定義が同値であることを証明するのが難しくなる。

今回は三角形に限って相似を定義することで、三角形の相似条件（相似定理）と三角形の相似の定義が同値であることを確認する。

定義　三角形の相似
△ABCと△A’B’C’において，
∠A＝∠A’，∠B＝∠B’，∠C＝∠C’　AB：A’B’＝BC：B’C’＝CA：C’A’のとき，
△ABCと△A’B’C’は**相似**であるといい，△ABC∽△A’B’C’と書く．
対応する辺の長さの比AB：A’B’＝kを**相似比**という．
※特に，k＝1のときの相似は，合同と同じことである．

定理　［相似定理］
2つの三角形が相似であるためには，次の3つの条件のうちどれか1つが成り立てばよい．
1)　対応する2組の内角がそれぞれ等しい．
2)　対応する3組の辺の比がそれぞれ等しい．
3)　対応する2組の辺の比とその夾角が等しい．

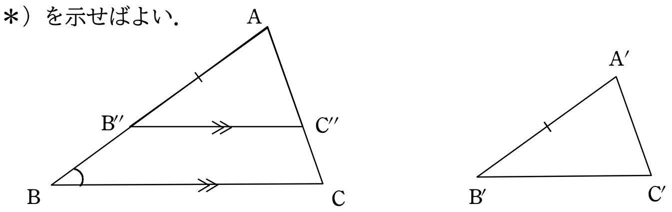
（証明）
1）を示す。
△ABCと△A’B’C’について考える．



対応する2組の内角がそれぞれ等しければ，残りの1組の内角も等しくなるので，
∠A＝∠A’，∠B＝∠B’，∠C＝∠C’である．
よって、あとはAB：A’B’＝BC：B’C’＝CA：C’A’…（*）であることを示せばよい．

（*）を示す。
AB=A’B’ならば合同になるので，AB＞A’B’の場合のみ示す（一般性は失われない）。
辺AB上にA’B’＝AB”となるように点B”をとり，同様に辺AC上にA’C’＝AC”となるように点C”をとる。このとき，2辺夾角より△A’B’C’≡△AB”C”となる．
よって，∠B＝∠B’＝∠AB”C”が成り立つ。
このとき同位角が等しいので、平行線の条件定理（定理1.11or定理1.9）より、
BC∥B”C”
したがって，BC∥B”C”であるから、平行線と線分比（定理1.1.5）より，
AB：AB”＝AC：AC”＝BC：B”C”
ゆえに，AB：A’B’＝AC：A’C’＝BC：B’C’（（*）が示された）
したがって、△ABC∽△A’B’C’　■

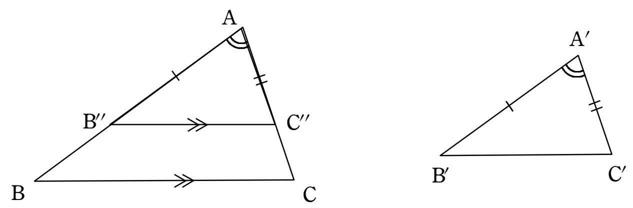
2）を示す。
対応する3組の辺の比がそれぞれ等しいから，あとは∠A＝∠A’，∠B＝∠B’，∠C＝∠C’…（*）を示せばよい．



（仮定）　$AB{:}BC{:}CA = A'B'{:}B'C'{:}C'A'$　（⇔ $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA}$）

$AB = A'B'$ のとき、3辺相等から△ABC≡△A’B’C’であるため、AB＞A’B’の場合のみ示す（一般性は失われない）。
辺AB上にA’B’＝AB”なるように点B”をとる．
B”を通りBCに平行な直線をひき，その交点をC”とする．
BC//B”C”より平行線と線分比（定理1.1.5）から，　AB：AB”＝AC：AC”
仮定より3辺比相等なので、AC：A’C’＝AB：A’B’
したがって、AC：A’C’＝AB：A’B’＝AB：AB”＝AC：AC”となるため，A’C’＝AC”
同様に、BC：B’C’＝AB：A’B’＝AB：AB”＝BC：BC”となるため，B’C’＝B”C”
よって，3辺相等より，△A’B’C’≡△AB”C”である．
BC//B”C”より　$\angle ABC = \angle ABC$，$\angle ACB = \angle ACB$
ゆえに，∠A＝∠B”AC”＝∠A’，∠B＝∠AB”C”＝∠B’，∠C=∠AC”B”＝∠C’．
（（*）が示された）
したがって、△ABC∽△A’B’C’　■

3）を示す
AB：A’B’＝AC：A’C’，∠A＝∠A’と仮定して，相似であることを証明する．



$AB = A'B'$ のとき、2辺夾角相等より△ABC≡△A’B’C’であるため、AB＞A’B’の場合のみ示す（一般性は失われない）。
辺AB上にA’B’＝AB”となるように点B”をとる．
AB＞A’B’のとき $AC > A'C'$ なので、同様に，辺AC上にA’C’＝AC”となるように点C”をとる．
2辺夾角相等より△A’B’C’＝△AB”C”である．
仮定より，AB：A’B’＝AC：A’C’だから，AB：AB”＝AC：AC”．
よって，線分比が等しいので線分比と平行線の定理（問1.18）より　BC∥B”C”．
BC∥B”C”より，∠B＝∠AB”C”＝∠B’，∠C＝∠AC”B”＝∠C’．
AB”：AB＝AC”：AC=B”C”：BCであるから平行線と線分比（定理1.15）より
AB：A’B’＝AC：A’C’＝BC：B’C’．
三辺比相等なので相似条件－2）より　△ABC∽△A’B’C’　■